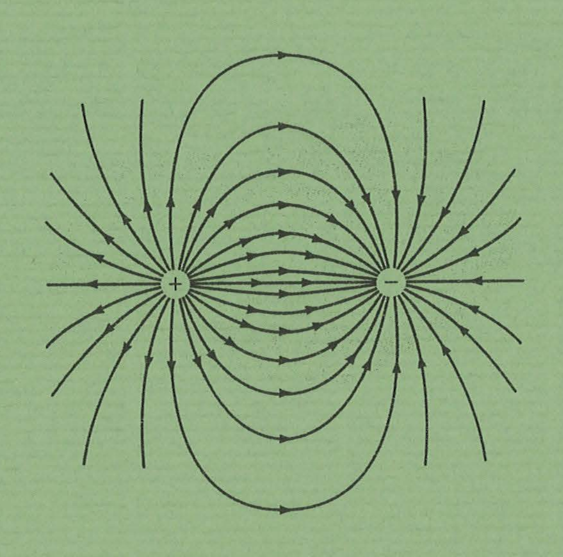
APUNTES SOBRE

ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO

por

MERCEDES GONZÁLEZ REDONDO



CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

APUNTES SOBRE

ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO

por

MERCEDES GONZÁLEZ REDONDO

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

Apuntes sobre Electricidad y Magnetismo (2ª Ed.).

Instituto Juan de Herrera.
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid.
CUADERNO 27.02
ISBN 84-89977-84-4
Depósito Legal: M-20956-1999

ÍNDICE

0. EN TORNO A LA CARGA ELÉCTRICA Y A LA ELECTRICIDAD

0.1. Materia y carga eléctrica.

La materia ordinaria es neutra. Está formada por átomos eléctricamente neutros, compuestos por un número igual de protones (cargas positivas) y de electrones (cargas negativas).

Las sustancias se pueden electrizar, pero no son eléctricas. Cuando dos (o más) objetos se ponen en contacto pueden transferirse electrones de uno a otro, quedando entonces cargados una positiva y otra negativamente.

La carga neta de las dos sustancias considerada globalmente no cambia. Es decir, la carga se conserva. El Principio ecuacional de conservación de la carga se considera como una "ley fundamental de la naturaleza".

La unidad fundamental de carga eléctrica (e) está relacionada con el culombio por:

$$e = 1'60.10^{-19}\ C$$

0.2. Clasificación de los materiales.

Conductores.- Son aquellos materiales en los que parte de los electrones de los átomos pueden moverse libremente, tales como el cobre y otros metales.

Aislantes.- Son aquellos materiales en los que todos los electrones están ligados a sus respectivos núcleos y ninguno puede moverse libremente, tales como la madera, el vidrio, etc.

Semiconductores.- Son aquellos materiales que en determinadas condiciones conducen la electricidad, es decir, presentan electrones libres.

En la naturaleza no existen ni conductores ni aislantes perfectos, por lo que se habla más correctamente de *buenos* o *malos conductores*.

1. CAMPO ELÉCTRICO I. DISTRIBUCIONES DISCRETAS DE CARGA

1.1. Ley de Coulomb (1785). [Perspectiva electrostática y mecanicista de la electricidad].

La fuerza ejercida por una carga puntual sobre otra está dirigida a lo largo de la línea que las une. La fuerza varía inversamente con el cuadrado de la distancia que separa las cargas y es proporcional al producto de las cargas. Es repulsiva si las cargas tienen el mismo signo y atractiva si las cargas tienen signos opuestos.

Esta ley viene expresada de la forma siguiente:

$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \vec{r}_{12}$$

donde r es la distancia (m), magnitud fundamental de la Geometría; F es la fuerza (N), magnitud primaria de la Mecánica; y q es la carga (C), una magnitud fundamental nueva que introduce la Electricidad. Por tanto, aunque k es una constante superflua[1], no se puede prescindir de ella porque están fijadas las unidades de las tres magnitudes de la ley. Su valor depende del medio dieléctrico existente entre las cargas. En el SI su valor es $8'99.10^9$ $N.m^2/C^2$, que se conoce con el nombre de constante de Coulomb. Se suele expresar de la forma:

$$k = \frac{1}{4\pi \epsilon_r \epsilon_o}$$

siendo ϵ_r la *permitividad relativa* o *constante dieléctrica relativa* del medio (respecto a la del vacío) y ϵ_o la *permitividad del vacío* o *constante dieléctrica del vacío*. En el SI su valor es:

$$\epsilon_o = \frac{1}{4\pi\ 9.10^9} = 8'85.10^{-12}\ \frac{C^2}{N\ m^2}$$

$\epsilon = \epsilon_r . \epsilon_o$ es la *constante dieléctrica absoluta* del medio.

Por el principio de superposisición de efectos para sistemas de cargas la ley de Coulomb se expresa de la forma:

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = q_o\, k \sum_i \frac{q_i}{r_{io}^2} \vec{r}_{io}$$

---

[1] Superflua en el sentido de la Teoría Dimensional.

1.2. Campo eléctrico en distribuciones discretas de carga.

a) El campo eléctrico en un punto P debido a una sola carga puntual q es

$$\vec{E} = \frac{k\,q}{r_o^2}\,\vec{r}_o$$

en donde r_o es la distancia de la carga q al punto del campo P y $\vec{r}_o$ es el vector unitario que apunta de q a P.

b) El campo eléctrico debido a un sistema de cargas puntuales es la suma vectorial de los campos originados por cada carga separadamente

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i = k \sum_i \frac{q_i}{r_{io}^2}\,\vec{r}_{io}$$

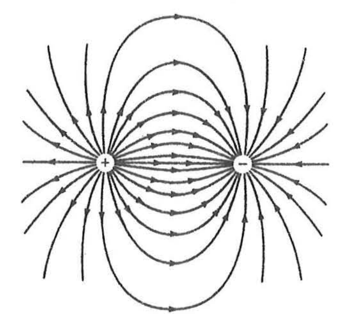
Las unidades del campo eléctrico en el SI son: N/C, o, también, V/m (voltio/metro, como se verá más adelante).

c) Líneas de campo eléctrico. Representación geométrica

El campo eléctrico se representa mediante unas líneas que indican la dirección del campo en cualquier punto. El vector campo $\vec{E}$ es tangente a la linea en cada punto e indica la dirección del campo eléctrico en dicho punto.

La ecuación diferencial de las líneas de campo eléctrico es:

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}$$



Sistema de dos ecuaciones diferenciales. Su integración son dos familias de superficies cuya intersección son las líneas de campo.

1.3. Movimiento de cargas puntuales en campos eléctricos.

Cuando una partícula con carga q se coloca en un campo eléctrico $\vec{E}$, experimenta la acción de una fuerza $q\vec{E}$. Las fuerzas gravitatorias que actúan sobre una partícula son usualmente despreciables en comparación con las fuerzas eléctricas. Si la fuerza eléctrica es la única fuerza significativa que actúa sobre la partícula, ésta adquiere una aceleración

$$\vec{F} = q\vec{E} = m\vec{a}$$

$$\vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E}$$

siendo m la masa de la partícula. Si el campo eléctrico se conoce, puede determinarse la relación carga a masa de la partícula a partir de la aceleración medida.

1.4. Dipolos eléctricos.

Un dipolo eléctrico es un sistema de dos cargas iguales pero opuestas, separadas por una pequeña distancia.

El momento dipolar, $\vec{p}$, es un vector de módulo igual al producto de la carga por la separación de las cargas, y apunta en la dirección desde la carga negativa a la positiva:

$$\vec{p} = q\vec{L}$$

2. CAMPO ELECTRICO II. DISTRIBUCIONES CONTINUAS DE CARGA

2.1. Carga y densidad de carga.

La carga distribuida en cuerpos permite introducir como magnitud secundaria la denominada "densidad de carga" que se define, según la naturaleza geométrica de los cuerpos, de las siguientes maneras:

a) *Densidad volumétrica de carga*: $\rho \equiv \dfrac{dQ}{dV}$

b) *Densidad superficial de carga*: $\sigma \equiv \dfrac{dQ}{dS}$

c) *Densidad lineal de carga*: $\lambda \equiv \dfrac{dQ}{dL}$

donde ρ, σ y λ tienen naturaleza de "magnitud intensiva".

Esta nueva magnitud, en general, puede considerarse como función de punto y tiempo, $\rho(P,t) \equiv \rho(x,y,z,t)$. De ordinario, se supone que es función diferenciable. Si es constante, la carga está uniformemente (homogéneamente) distribuida.

2.2. Expresión del campo eléctrico mediante la ley de Coulomb.

Una distribución de carga eléctrica crea un campo que se expresa en un punto arbitrario P mediante

$$\vec{E} = \int_V d\vec{E} = \int_V \frac{k\,dq}{r^2}\,\vec{r}_o = \int_V \frac{k\,\rho\,dV}{r^2}\,\vec{r}_o$$

Tres tipos de problemas de naturaleza matemática pueden presentarse cuando se intenta calcular la integral:

1) *Relativo a ρ:* si no es constante, obviamente no puede sacarse fuera de la integral (lo que sí puede hacerse con la constante universal k).
2) *Relativo a r*: la distancia de cada elemento diferencial a P es variable, por lo que no puede sacarse de la integral.
3) *Relativo a $\vec{r}$*: se trata de una integral vectorial. Habría que integrar por componentes (nunca el 'módulo').

Estas dificultades hacen difícil la obtención del campo por este procedimiento. Sólo algunos casos especiales permiten una fácil integración.

2.3. Teorema de Gauss.

La descripción cualitativa del campo eléctrico mediante líneas de fuerza está relacionada con una ecuación matemática llamada ley de Gauss, que relaciona el campo eléctrico sobre una superficie cerrada con la carga neta incluida dentro de la superficie. Esta ley permite calcular fácilmente los campos eléctricos que resultan de distribuciones simétricas de carga, tales como una corteza esférica o una línea infinita.

El flujo neto a través de cualquier superficie cerrada (superficie gaussiana) en un campo eléctrico es igual a $4\pi k$ veces la carga neta dentro de la superficie:

$$\phi = \oint_S \vec{E}.d\vec{S} = 4\pi k Q_{dentro}$$

Este teorema sólo puede aplicarse cuando siendo simétrico el campo eléctrico, podemos obtener una superficie gaussiana en la cual el campo es uniforme en toda ella y, además, dicho campo es normal a la superficie en todos los puntos de la misma.

Escribiendo la constante de Coulomb k en función de la permitividad del espacio libre (vacío), la ley de Coulomb se expresa de la forma:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\vec{r}_{12}$$

y la expresión matemática del teorema de Gauss

$$\phi = \oint_S \vec{E}.d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_o} Q_{dentro}$$

El valor de ϵ_0 en unidades SI es

$$\epsilon_o = \frac{1}{4\pi k} = \frac{1}{4\pi\left(8'99.10^9 \ \frac{N.m^2}{C^2}\right)} = 8'85.10^{-12} \ \frac{C^2}{N.m^2}$$

2.4. Ejercicios propuestos.

Demostrar que el campo eléctrico en las distintas distribuciones de carga que se especifican a continuación tiene las siguientes expresiones:

a) en la mediatriz de una carga lineal finita

$$E_r = \frac{2k\lambda}{r} sen\theta_o$$

b) cerca de una carga lineal finita

$$E_r = \frac{1}{2\pi\epsilon_o}\frac{\lambda}{r} = 2k\frac{\lambda}{r}$$

c) en el eje de un disco de carga

$$E_x = 2\pi k\sigma\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right)$$

d) cerca de un plano infinito de carga

$$E_n = \frac{\sigma}{2\epsilon_o} = 2\pi k\sigma$$

e) en el interior de un cilindro sólido de carga

$$E_r = \frac{\rho}{2\epsilon_o} r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_o R^2} r \qquad r \leq R$$

f) en el exterior de un cilindro sólido de carga

$$E_r = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_o r} = \frac{1}{2\epsilon_o}\frac{\lambda}{r} \qquad r \geq R$$

g) en el interior de una esfera sólida de carga

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{Q}{R^3} r \qquad r \leq R$$

h) en el exterior de una esfera sólida de carga

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{Q}{r^2} \qquad r \geq R$$

3. POTENCIAL ELECTRICO

3.1. Energía potencial mecánica.

Cuando una fuerza conservativa actúa sobre una partícula que experimenta un desplazamiento $d\vec{l}$, la variación de la función energía potencial dU viene definida por la expresión:

$$dU = -\vec{F}.d\vec{l}$$

El trabajo realizado por una fuerza conservativa disminuye la energía potencial. La fuerza ejercida por un campo eléctrico $\vec{E}$ sobre una carga puntual q_o es

$$\vec{F} = q_o\,\vec{E}$$

Cuando la carga experimenta un desplazamiento $d\vec{l}$ en un campo eléctrico $\vec{E}$ la variación de energía potencial electrostática viene expresada de la forma:

$$dU = -q_o\,\vec{E}.d\vec{l}$$

Si la carga se desplaza desde una posición inicial *a* hasta otra final *b*, la variación de energía potencial elestrostática es

$$\Delta U = U_b - U_a = \int_a^b dU = -\int_a^b q_o\,\vec{E}.d\vec{l}$$

3.2. Potencial eléctrico.

La variación de energía potencial es proporcional a la carga testigo q_o. La variación de energía potencial por unidad de carga se denomina **diferencia de potencial,** dV:

$$dV = \frac{dU}{q_o} = -\vec{E}.d\vec{l}$$

Para un desplazamiento finito desde el punto *a* a un punto *b*, el cambio de potencial es

$$\Delta V = V_b - V_a = \frac{\Delta U}{q_o} = -\int_a^b \vec{E}.d\vec{l}$$

La diferencia de potencial $V_b - V_a$ es el valor negativo del trabajo por unidad de carga realizado por el campo eléctrico sobre una carga testigo positiva cuando ésta se desplaza del punto a al punto b.

La unidad en el SI del potencial y de la diferencia de potencial es el voltio (V):

$$1\ V = 1\ \frac{J}{C}$$

En función de esta unidad, la unidad del campo eléctrico es también

$$1\ \frac{N}{C} = 1\ \frac{V}{m}$$

Las líneas de campo eléctrico señalan en la dirección en la que disminuye el potencial eléctrico.

El campo eléctrico $\vec{E} = k\ \frac{q}{r^2}\ \vec{r}$ es un campo vectorial central diferenciable, lo que implica que es un campo conservativo, irrotacional y que, por tanto, deriva de un potencial

$$\vec{E} = -\ gr\vec{a}d\ V$$

Por tanto, el potencial correspondiente a una carga puntual es

$$V = k\ \frac{q}{r}$$

El potencial correspondiente a una distribución continua de carga se obtiene extendiendo la integral a toda la distribución

$$V = \int \frac{k\ dq}{r}$$

Esta expresión puede utilizarse sólo si la distribución de carga está contenida en un volumen finito, de modo que el potencial puede considerarse nulo en el infinito.

Si una carga testigo q_o se deja en libertad en un punto situado a una distancia r de una carga puntual q que se mantiene fija en el origen, la carga testigo es acelerada en la dirección del campo eléctrico. El trabajo realizado por el campo eléctrico cuando la carga testigo se mueve de r a ∞ es

$$W = \int_r^\infty q_o\ \vec{E}.d\vec{l} = q_o \int_r^\infty E_r\ dr = q_o \int_r^\infty k\ \frac{q}{r^2}\ dr = k\ \frac{q q_o}{r}$$

Este trabajo es la energía potencial electrostática del sistema formado por las dos cargas

$$U = k\ \frac{q q_o}{r} = q_o\ V$$

La energía potencial electrostática de un sistema de cargas puntuales es el trabajo necesario para transportar las cargas desde una posición finita (r) hasta sus posiciones finales (∞). Alternativamente, la energía potencial puede definirse como el trabajo que debe realizar una fuerza aplicada $\vec{F}_{ap} = -q_o\vec{E}$ para trasladar una carga positiva q_o desde el infinito hasta una distancia r medida desde una carga puntual q.

II. CIRCUITOS DE CORRIENTE CONTINUA. COMPONENTES.

4. CORRIENTE ELECTRICA

4.1. Caracterización

La corriente eléctrica se define como el flujo de cargas eléctricas que, por unidad de tiempo, atraviesan un área transversal. Si ΔQ es la carga que fluye a través del área transversal A en el tiempo Δt, la corriente, o intensidad de corriente, es

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

La unidad en el SI es el amperio (A): $1\ A = 1\ \frac{C}{s}$

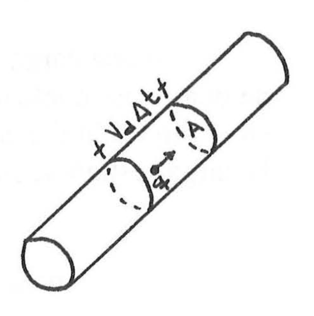
Por convenio, la dirección de la corriente es la del flujo de carga positiva.

Consideremos una corriente en un alambre conductor de sección transversal A. Sea n el número de partículas libres portadoras de carga por unidad de volumen. Suponiendo que cada partícula transporta una carga q y que se mueve con una velocidad de desplazamiento v_d, en el tiempo Δt, todas las partículas contenidas en el volumen $Av_d\Delta t$ pasan a través del área A. El número de partículas en este volumen es $nAv_d\Delta t$ y la carga total es

$$\Delta Q = qnAv_d\Delta t$$

La intensidad de corriente es, por tanto,

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = nqAv_d$$



4.2. Ley de Ohm.

La cantidad de corriente en un tramode conductor lineal es proporcional a la diferencia de potencial que existe entre los extremos del tramo.

$$I \propto V$$

I circula por todo el tramo ya que las cargas quedan confinadas.

La constante de proporcionalidad se escribe de la forma $1/R$, siendo R la resistencia:

$$I = \frac{1}{R} V \quad , \quad es\ decir \quad , \quad R = \frac{V}{I}$$

4.3. Energía en los circuitos eléctricos.

Cuando circula una corriente eléctrica por un conductor, parte de la energía eléctrica asociada a la corriente se convierte continuamente en energía térmica (y lumínica) del mismo (que se disipa hacia el ambiente; la energía térmica, no los electrones que quedan confinados).

Cuando fluyen cargas positivas en el interior de un conductor, el flujo se realiza desde un potencial alto hasta otro bajo en el sentido del campo eléctrico. La carga pierde así energía potencial. Esta pérdida de energía potencial se invierte en un incremento de energía térmica (y lumínica) del conductor.

La energía perdida por unidad de tiempo es la potencia disipada en el conductor

$$P \equiv IV \equiv I^2 R$$

La unidad de potencia en el SI es el Watio (W): $1\ W = 1\ A.V$

Un aparato que suministra energía a un circuito se denomina *fuente de fuerza electromotriz*. La potencia suministrada por una de estas fuentes es el producto de la fem por la intensidad de corriente:

$$P \equiv \mathcal{E} I$$

Una batería ideal es una fuente de fem que mantiene una diferencia de potencial constante entre sus bornes independientemente de la corriente suministrada.

Una batería real puede considerarse como una batería ideal en serie con una pequeña resistencia llamada *resistencia interna*.

5. CONDENSADORES

5.1. Caracterización.

Un *condensador*, también llamado *capacitor*, es un dispositivo que sirve para almacenar carga y energía. Está constituido por dos conductores (denominados armaduras) aislados uno de otro, que poseen cargas de cuantía iguales y opuestas y que están separados por un dieléctrico (o por el vacío).

La cantidad de carga sobre las placas depende de la diferencia de potencial y de la geometría del condensador.

Todo condensador se define mediante la **capacidad** que tiene para almacenar carga bajo una determinada diferencia de potencial:

$$C = \frac{Q}{V}$$

La unidad de capacidad en el SI es el **faradio** (F):

$$1\ F = 1\ \frac{C}{V}$$

El más corriente es el condensador plano o de placas paralelas.

5.2. El almacenamiento de la energía eléctrica.

Al comienzo del proceso de carga de un condensador, los conductores no están cargados, no hay campo eléctrico y ambos conductores están al mismo potencial. Una vez empiece a cargarse, se transfiere una carga positiva de un conductor a otro quedando el primero cargado negativamente y el otro cargado positivamente. Como el conductor positivo está a mayor potencial que el negativo, la energía potencial de la carga transferida crece. Por tanto, debe realizarse un trabajo para cargar un condensador. Parte de este trabajo queda almacenado en forma de energía potencial electrostática.

Una vez cargado el condensador, la carga total transferida desde un conductor a otro, Q, depende de la diferencia de potencial que haya entre los conductores y la capacidad del condensador. Globalmente, la carga total de un condensador es nula, debido a que las cargas de ambas armaduras son iguales y de signo contrario, denominándose carga de un condensador al valor absoluto de la carga que almacena uno cualquiera de los conductores.

$$Q = V \cdot C$$

El proceso de carga de un condensador no es instantáneo. Si q es la carga transferida al cabo de cierto tiempo durante el proceso, la diferencia de potencial entonces será $V = q/C$. Si se transfiere ahora una pequeña cantidad adicional de carga dq desde el conductor negativo a potencial cero hasta el conductor positivo a un potencial V, la energía potencial de la carga se incrementa en

$$dU = V\,dq = \frac{q}{C}\,dq$$

El incremento total de energía potencial U es la suma o integral de estas cargas dU cuando q crece desde cero a su valor final Q:

$$U = \int dU = \int_0^Q \frac{q}{C}\,dq = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

La energía potencial es la energía almacenada en el condensador.

Utilizando la relación $C = Q/V$, puede expresarse la energía de varios modos:

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2$$

5.3. Combinaciones de condensadores.

Frecuentemente se utilizan dos o más condensadores en combinación.

a) **En paralelo**. Si se tienen dos condensadores conectados en paralelo, con una diferencia de potencial entre las placas de cada condensador de

$$V = V_a - V_b$$

y sus capacidades son C_1 y C_2, las cargas Q_1 y Q_2 almacenadas sobre las placas vienen dadas por la expresión:

$$Q_1 = C_1 V \quad , \quad Q_2 = C_2 V$$

y la carga total almacenada es

$$Q = Q_1 + Q_2 = C_1 V + C_2 V = (C_1 + C_2)\ V$$

Por tanto, la capacidad equivalente de dos (o más) condensadores en paralelo es igual a la suma de las capacidades individuales.

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + \dots$$

b) **En serie.** Cuando se conectan dos (o más) condensadores en serie, se establece una diferencia de potencial en cada uno los dos condensadores, de modo que la diferencia de potencial V es la suma de los dos. Lo que sí es lo mismo en los dos es la carga *Q*. La diferencia de potencial en cada uno de los condensadores será:

$$V_1 = \frac{Q}{C_1} \quad , \quad V_2 = \frac{Q}{C_2}$$

C_1 V_1
C_2 V_2

y la diferencia de potencial total

$$V = V_1 + V_2 = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)$$

La capacidad equivalente de dos (o más) condensadores en serie es la de un solo condensador que reemplazando a los dos condensadores, presenta la misma diferencia de potencial *V* para la misma carga *Q*:

$$V = \frac{Q}{C_{eq}}$$

Por tanto,

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots$$

6. RESISTENCIAS

6.1. Caracterización.

La intensidad de corriente que circula por un hilo conductor es directamente proporcional a la diferencia de potencial que existe entre sus extremos e inversamente proporcional a una cualidad del conductor denominada *resistencia eléctrica* del mismo. La resistencia es la inversa de la conductancia.

La unidad de resistencia eléctrica en el SI es el *ohmio* (Ω). Un ohmio se define como la resistencia que ofrece un conductor cuando, al establecer entre sus extremos la diferencia de potencial de un voltio, circula por él una corriente de intensidad un amperio. Corresponde a la resistencia que ofrece a 0 °C una columna de mercurio de 106'3 cm de longitud, de sección constante y de masa total 14'4521 gramos (*ohmio internacional*).

$$1\ \Omega = 1\ \frac{V}{A}$$

Para expresar resistencias grandes se utilizan el kiloohmio (1 kΩ = 10^3 Ω) y el megaohmio (1 MΩ = 10^6 Ω), y si se trata de resistencias pequeñas, el microohmio (1 μΩ = 10^{-6} Ω).

Si se desea disponer entre dos puntos de un circuito de una resistencia eléctrica determinada, se utilizan con este fin diversos elementos, que reciben el nombre de *resistencias* o *resistores*, y que vienen definidos por su valor en ohmios y por la potencia que son capaces de disipar. Pueden ser fijas o variables.

6.2. Combinaciones de resistencias (o resistores).

a) Dos (o más) resistencias conectadas de modo que la misma carga fluye a través de cada una de ellas, se dice que están conectadas *en serie*.

I
R_1 R_2

La caída de potencial a través de las dos resistencias es la suma de las caídas de potencial a través de las resistencias individuales:

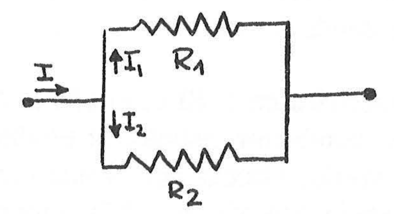
$$V = IR_1 + IR_2 = I\ (R_1 + R_2)$$

La resistencia equivalente a varias resistencias en serie es igual a la suma de

las resistencias originales. Cuando hay más de dos resistencias en serie, la resistencia equivalente es:

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + \dots$$

b) Dos (o más) resistencias conectadas de modo que entre ellas se establece la misma diferencia de potencial, se dice que están conectadas *en paralelo* (o *en derivación*).



La corriente total es la suma de las corriente individuales:

$$I = I_1 + I_2$$

Sea $V = V_a - V_b$ la caída de potencial a través de cada resistencia. En función de las corrientes y resistencias,

$$V = I_1\, R_1 = I_2\, R_2 = I\, R_{eq}$$

$$I = \frac{V}{R_{eq}} = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} + \dots = V\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots\right)$$

Por tanto, la resistencia equivalente a varias resistencias en paralelo es:

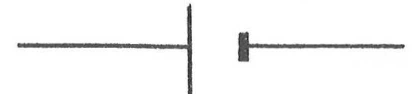
$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots$$

7. CIRCUITOS DE CORRIENTE CONTINUA: REGLAS DE KIRCHHOFF

7.1. Generadores

Un generador es todo dispositivo capaz de transformar cualquier tipo de energía no eléctrica (química, mecánica, etc.) en energía eléctrica y suministrársela a las cargas que lo atraviesan.

Se llaman *polos* o *bornes* del generador los puntos por los que éste se une al circuito exterior, designándose como positivo el de mayor potencial y negativo el de menor. Un generador se representa de la siguiente manera:



Consideramos que la corriente en un hilo conductor circula en el sentido de los potenciales decrecientes, es decir, que sale del generador por el polo positivo y penetra en él por el negativo.

En todo generador existe una proporcionalidad directa entre la energía no eléctrica que consume y la carga eléctrica que suministra al circuito. Esta relación se expresa matemáticamente:

$$U = \mathcal{E}\, Q = \mathcal{E}\, I\, t$$

donde $\mathcal{E}$ es una constante de proporcionalidad llamada *fuerza electromotriz* (fem), la cual depende de la forma y construcción del generador.

La fuerza electromotriz de un generador es numéricamente igual a la energía no eléctrica que transforma en eléctrica por cada unidad de carga que lo atraviesa. Sus dimensiones y unidades son las mismas que las del potencial. Sin embargo, conviene darse cuenta de que son conceptos distintos: la fuerza electromotriz es, precisamente, la causa de que exista una diferencia de potencial en los extremos del conductor.

7.2. Receptores.

Los receptores son dispositivos que aprovechan la energía de las partículas eléctricas que los atraviesan para transformarla en otro tipo de energía.

De la misma manera que sucede con los generadores, también en los receptores existe una proporcionalidad directa entre la energía que suministran y la carga eléctrica que los atraviesa. Esta relación se expresa matemáticamente de la forma:

$$U = \mathcal{E}'\, Q = \mathcal{E}'\, I\, t$$

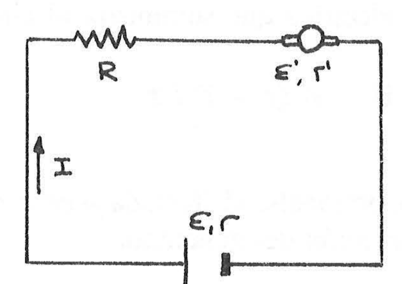
donde $\mathscr{E}'$ es una constante de proporcionalidad, característica de cada receptor, denominada *fuerza contraelectromotriz* (fcem).

La fuerza contraelectromotriz de un receptor es numéricamente igual a la cantidad de energía eléctrica que transforma en energía de otro tipo que no sea calorífico ni lumínico por cada unidad de carga que lo atraviesa. Tiene la misma ecuación de dimensiones y se mide en las mismas unidades que el potencial, lo mismo que sucedía con la fuerza electromotriz.

Un receptor carece de fuerza contraelectromotriz cuando la energía eléctrica que consume la convierte íntegramente en calor y luz. Tal es el caso de una bombilla de incandescencia o una estufa.

7.3. Ley generalizada de Ohm.

Se considera un circuito constituido por un generador, caracterizado por su fuerza electromotriz $\mathscr{E}$ y su resistencia interna r, y un receptor con su fuerza contraelectromotriz $\mathscr{E}'$ y su resistencia interna r', unidos ambos mediante conductores a través de una resistencia (resistor) R, tal y como muestra la figura.



El valor de la energía eléctrica suministrada por el generador durante un tiempo t viene dado por la expresión:

$$U = \mathscr{E} I t$$

El valor de la energía eléctrica consumida por una resistencia es

$$U = I^2 R t$$

Teniendo en cuenta que en el circuito hay tres resistencias: la exterior, R, y las internas, r y r', el valor de la energía eléctrica consumida por ellas es

$$U = I^2 R t + I^2 r t + I^2 r' t$$

y como el valor de la energía que, a su vez, absorbe el motor viene dado por la expresión

$$U = \mathscr{E}' I t$$

la energía total consumida en el circuito será:

$$U = I^2 R t + I^2 r t + I^2 r' t + \mathscr{E}' I t$$

Como consecuencia del principio general de conservación de la energía, se verifica que la energía consumida por el circuito ha de ser igual a la suministrada por el generador. Por tanto,

$$\mathscr{E} I t = I^2 R t + I^2 r t + I^2 r' t + \mathscr{E}' I t$$

Simplificando:

$$\mathscr{E} = I (R + r + r') + \mathscr{E}'$$

de donde se obtiene la expresión de la intensidad de corrriente:

$$I = \frac{\mathscr{E} - \mathscr{E}'}{R + r + r'}$$

Considerando como negativas las fuerzas contraelectromotrices, podemos escribir la expresión anterior de la forma:

$$I = \frac{\Sigma \mathscr{E}}{\Sigma R}$$

La intensidad de corriente que circula por un circuito cerrado es igual a la suma algebraica de las fuerzas electromotrices y contraelectromotrices dividida por la suma de las resistencias exteriores e internas del circuito (ley generalizada de Ohm).

7.4. Aparatos de medida.

a) **Voltímetros.** Son aparatos que miden la diferencia de potencial (V) entre dos puntos distintos de un circuito. Se colocan siempre en paralelo (o en derivación). Para que la presencia del voltímetro no produzca modificaciones apreciables en la tensión, su resistencia ha de ser muy grande (para que la i que derive sea muy pequeña).

b) **Amperímetros.** Son aparatos que miden la intensidad de corriente (A). Se colocan en serie en el circuito y su resistencia ha de ser pequeña.

c) **Galvanómetros.** Son aparatos de gran precisión que detectan o miden intensidades de corriente muy pequeñas. Funcionan de la misma forma que los amperímetros y también se colocan en serie con el circuito.

7.5. Reglas de Kirchhoff.

En circuitos en los que haya más de un conductor se verifica también la ley de Ohm; sin embargo, es muy útil aplicar unas reglas deducidas por Gustav Robert

Kirchhoff (1824-1887) a partir de la ley de Ohm que simplifican enormemente el cálculo.

Previamente vamos a definir algunos términos:

a) *Red.* Es un conjunto de conductores, resistencias y generadores, unidos entre sí de forma arbitraria, de manera que por ellos circulan corrientes de distintas intensidades.

b) *Nudo.* Es un punto donde concurren más de dos conductores.

c) *Rama.* Es el conjunto de elementos que se encuentran entre dos nudos consecutivos de una red.

d) *Malla.* Es todo circuito conductor cerrado que se obtiene partiendo de un nudo y volviendo a él, sin pasar dos veces por una misma rama.

Las leyes de Kirchhoff son fundamentalmente dos, que se pueden aplicar cuando la red se encuentra en equilibrio estacionario, es decir, cuando los potenciales de los distintos nudos y las intensidades permanecen constantes a lo largo del tiempo. Una de las leyes se aplica a los nudos y la otra a las mallas, y de esta forma se obtiene un sistema de tantas ecuaciones independientes como número de ramas compongan la red, cuya resolución, si conocemos las resistencias y las fuerzas electromotrices, nos da las intensidades de corriente en las distintas ramas.

Primera regla de Kirchhoff (regla de los nudos)

En un punto o nudo de ramificación de un circuito en donde puede dividirse la corriente, la suma de las corrientes que entran en el nudo debe ser igual a la suma de las corrientes que salen del mismo.

$$\sum_i I_i = 0$$

Segunda regla de Kirchhoff (regla de las mallas)

La suma algebraica de las variaciones de potencial a lo largo de cualquier bucle o malla del circuito debe ser igual a cero.

$$\sum_j \mathcal{E}_j - \sum_k I \cdot R_k = 0$$

$$\sum_j \mathcal{E}_j = \sum_k I \cdot R_k$$

III. CAMPO MAGNÉTICO

8. CAMPO MAGNÉTICO

8.1. Introducción.

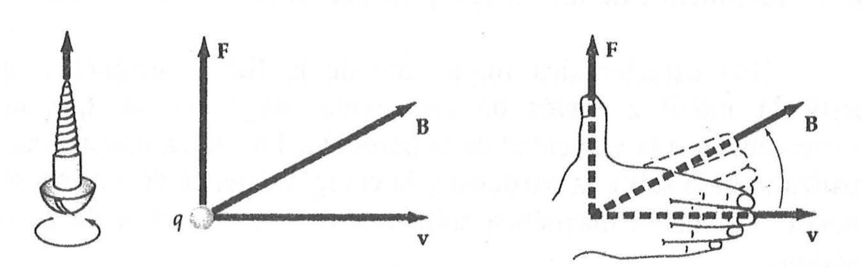
Las cargas móviles interactúan entre sí por medio de fuerzas magnéticas. Como las corrientes eléctricas están formadas por cargas móviles, también ejercen fuerzas magnéticas entre sí. Esta fuerza se describe diciendo que una carga o corriente móvil crea un campo magnético, el cual, a su vez, ejerce una fuerza sobre la otra carga o corriente móvil. En resumen, todos los campos magnéticos son creados por cargas en movimiento.

8.2. Fuerza ejercida por un campo magnético.

Cuando una carga q se mueve con una velocidad v dentro de un campo magnético $\vec{B}$, aparece una fuerza (magnética) $\vec{F}$ que actúa sobre la carga y que viene expresada por

$$\vec{F} = q(\vec{v} x \vec{B})$$

Como $\vec{F}$ es perpendicular a $\vec{v}$ y $\vec{B}$, resulta ser perpendicular al plano definido por estos dos vectores. La dirección de $\vec{F}$ viene dada por la regla de la mano derecha como el eje de rotación cuando $\vec{v}$ gira hacia $\vec{B}$.



De la ecuación anterior puede expresarse el campo magnético $\vec{B}$ en función de la fuerza ejercida sobre una carga móvil. La unidad del campo magnético en el SI es el **tesla** (T). La carga de un culombio que se mueve con una velocidad de un metro por segundo perpendicular a un campo magnético de un tesla, experimenta la fuerza de un Newton.

$$1\ T = 1\ \frac{N/C}{m/s} = 1\ \frac{N}{A.m}$$

Esta unidad es bastante grande. El campo terrestre es algo menor que 10^{-4} T. Una unidad usada corrientemente, deducida del sistema cgs, es el **gauss** (G), relacionada con el tesla por:

$$1\ \mathrm{T} = 10^4\ \mathrm{G}$$

Cuando por un hilo conductor situado en el interior de un campo magnético circula una corriente, existe una fuerza que se ejerce sobre le conductor que es simplemente la suma de las fuerzas magnéticas sobre las partículas cargadas cuyo movimiento produce la corriente. Si tenemos un segmento corto de hilo de área de sección recta A y longitud ℓ por el cual circula la corriente I y este hilo está en el interior de un campo magnético $\vec{B}$, la fuerza magnética sobre cada carga es $q\vec{v}_d x\vec{B}$, siendo v_d la velocidad de desplazamiento de los portadores de carga. El número de cargas en el interior del segmento de hilo es el número n de las que hay por unidad de volumen multiplicado por el volumen $A\ell$. Por tanto, la fuerza total $\vec{F}$ sobre el segmento del hilo es

$$\vec{F} = (q\vec{v}_d x\vec{B})nA\ell$$

Como la corriente que circula por un hilo conductor es

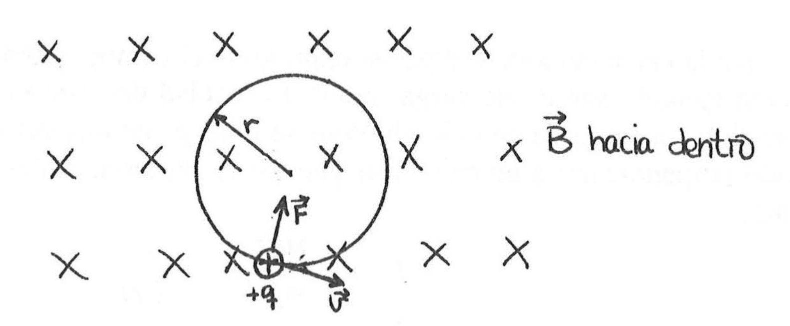
$$I = nqv_dA$$

La fuerza que actúa sobre un elemento de corriente viene dada por:

$$d\vec{F} = I\ d\vec{\ell} x\vec{B}$$

8.3. Movimiento de una carga puntual en el interior de un campo magnético.

Una característica importante de la fuerza magnética que actúa sobre una partícula móvil a través de un campo magnético es que la fuerza es siempre perpendicular a la velocidad de la partícula. La fuerza magnética, por consiguiente, no realiza trabajo sobre la partícula y la energía cinética de ésta no se ve afectada por esta fuerza. La fuerza magnética sólo modifica la dirección de la velocidad pero no su módulo.



En el caso especial en que la velocidad de una partícula sea perpendicular a un campo magnético uniforme (ver figura) la partícula se mueve describiendo una órbita circular. La fuerza magnética proporciona la fuerza centrípeta necesaria para el movimiento circular. Podemos relacionar el radio de la circunferencia r con el campo

magnético $\vec{B}$ y la velocidad de la partícula $\vec{v}$ haciendo que la fuerza resultante sea igual a la masa m multiplicada por la aceleración centrípeta $\frac{v^2}{r}$ de acuerdo con la segunda ley de Newton. La fuerza neta en este caso es qvB ya que $\vec{v}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares. Así pues, la segunda ley de Newton resulta:

$$F = ma$$

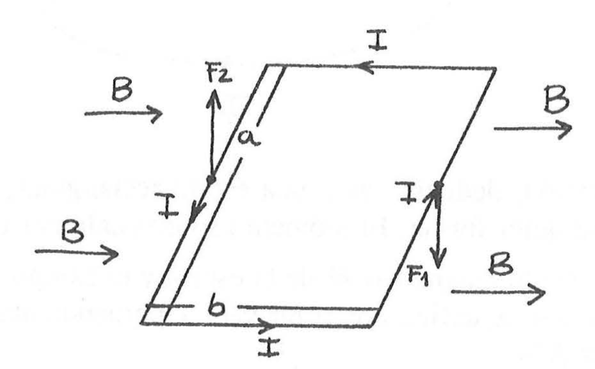
$$qvB = \frac{mv^2}{r}$$

El radio de la órbita circular que describe la partícula es:

$$r = \frac{mv}{qB}$$

8.4. Pares de fuerzas sobre espiras de corriente.

La figura muestra una espira de alambre rectangular de longitud a y anchura b por la que circula una corriente I en un campo magnético externo y uniforme $\vec{B}$ que es paralelo al plano de la espira.



En aquellos segmentos donde la corriente es paralela o antiparalela al campo magnético $\vec{B}$, las fuerzas son nulas, ya que $Id\vec{\ell}x\vec{B}$ es cero. Las fuerzas sobre los lados de la espira, donde el campo es perpendicular a la corriente, tienen la magnitud

$$F_1 = F_2 = IaB$$

Como estas fuerzas son iguales y opuestas, forman entre sí un par. La fuerza resultante es, por tanto, cero y el momento respecto a cualquier punto es independiente de la localización del punto. El punto P es un punto conveniente respecto al cual calcular el momento del par. La magnitud del momento es

$$\tau = F_1 b = IabB = IAB$$

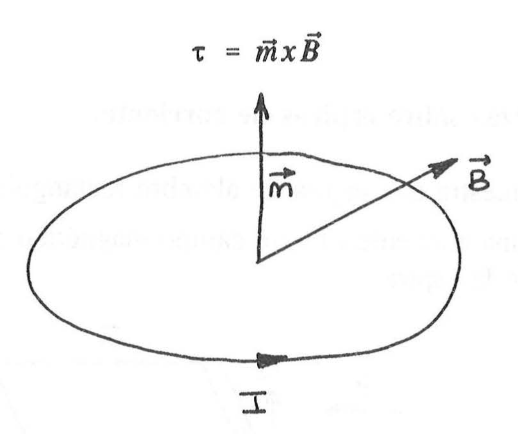
en donde A es el área de la espira. El momento del par es igual al producto de la intensidad de la corriente, el área de la espira y el campo magnético B. Este momento tiende a girar la espira de modo que su plano sea perpendicular a $\vec{B}$. La orientación de la espira puede describirse convenientemente mediante un vector unitario $\vec{n}$, perpendicular al plano de la espira. El momento del par tiende a girar $\vec{n}$ en la dirección de $\vec{B}$.

El **momento dipolar magnético (o momento magnético)** de la espira de corriente es

$$\vec{m} = NIA\vec{n}$$

La unidad SI del momento magnético es el amperio-metro^2 ($A.m^2$). En función del momento dipolar magnético, el momento sobre la espira de corriente viene dado por

$$\tau = \vec{m} x \vec{B}$$



Esta ecuación, deducida para una espira rectangular, es válida en general para una espira de cualquier forma. El momento sobre cualquier espira es igual al producto vectorial del momento magnético $\vec{m}$ de la espira y el campo magnético $\vec{B}$, en donde el momento magnético se define como un vector perpendicular al área de la espira, de magnitud igual a *NIA*.

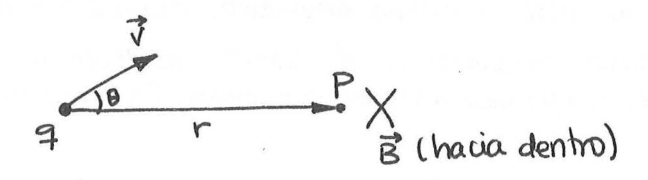
8.5. Campo magnético creado por las cargas puntuales móviles.

Cuando una carga puntual q se mueve con una velocidad $\vec{v}$, se produce un campo magnético $\vec{B}$ en el espacio dado por

$$\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{q\vec{v}x\vec{r}}{r^2}$$

en donde $\vec{r}$ es un vector unitario que apunta desde la carga q al punto del campo considerado y μ_o es una constante de proporcionalidad llamada **permeabilidad del espacio libre (vacío)**, de valor

$$\mu_o = 4\pi.10^{-7} \frac{T.m}{A} = 4\pi.10^{-7} \frac{N}{A^2}$$



Esta ecuación correspondiente al campo magnético debido a una carga móvil es análoga a la ley de Coulomb del campo eléctrico producido por una carga puntual

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{q}{r^2} \vec{r}$$

El campo magnético creado por una carga móvil tiene las siguientes características:

1. La magnitud de $\vec{B}$ es proporcional a la carga q y a la velocidad v y varía inversamente con el cuadrado de la distancia desde la carga al punto del campo.
2. El campo magnético es cero a lo largo de la línea de movimiento de la carga. En otros puntos del espacio es proporcional a sen Θ, siendo Θ el ángulo formado por el vector velocidad $\vec{v}$ y el vector $\vec{r}$ desde la carga al punto del campo.
3. La dirección de $\vec{B}$ es perpendicular a ambos, la velocidad $\vec{v}$ y el vector $\vec{r}$. Posee la dirección dada por la regla de la mano derecha cuando $\vec{v}$ gira hacia $\vec{r}$.

8.6. Campo magnético creado por corrientes eléctricas: Ley de Biot y Savart.

El campo magnético $d\vec{B}$ a una distancia r de un elemento de corriente $I\,d\ell$ es

$$d\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I\, d\vec{\ell} x \vec{r}}{r^2}$$

lo cual se conoce como la **ley de Biot y Savart**. El campo magnético es perpendicular, tanto al elemento de corriente como al vector $\vec{r}$ dirigido desde el elemento de corriente al punto del campo considerado.

8.7. Ley de Ampère.

Los campos magnéticos que surgen de las corrientes no se originan o terminan en puntos del espacio, sino que forman bucles cerrados que rodean la corriente.

Análoga a la ley de Gauss, que relaciona la componente normal del campo eléctrico, sumado sobre una superficie cerrada con la carga neta interior a la superficie, existe una para el campo magnético, llamada **ley de Ampère**, que relaciona la componente tangencial de $\vec{B}$, sumado alrededor de una curva cerrada *C*, con la corriente I_C que pasa a través de la curva. En forma matemática la ley de Ampère es

$$\oint_C \vec{B}.d\vec{\ell} = \mu_o \, I_C \qquad C, \textit{ cualquier curva cerrada}$$

en donde I_C es la corriente neta que penetra en el área limitada por la curva *C*.

La ley de Ampère sólo es válida si las corrientes son continuas. Puede utilizarse para deducir expresiones del campo magnético en situaciones de alto grado de simetría, tales como un conductor largo y rectilíneo, portador de corriente; un toroide estrechamente arrollado; y un solenoide largo estrechamente arrollado.

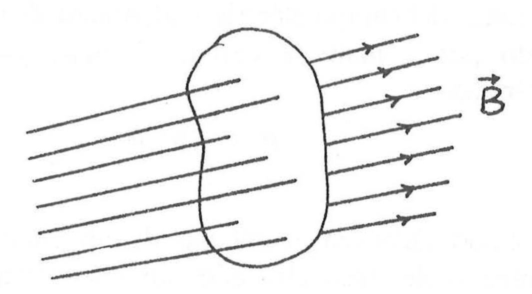
9. INDUCCION MAGNETICA

9.1. Flujo magnético.

El flujo magnético es el análogo magnético al flujo eléctrico. Está relacionado con el número de líneas de campo magnético que pasan a través de un área determinada.

Cuando el campo magnético $\vec{B}$ es perpendicular al área limitada por un simple circuito formado por una vuelta de conductor, el flujo m agnético se define como el producto del campo magnético $\vec{B}$ y el área limitada A por el circuito

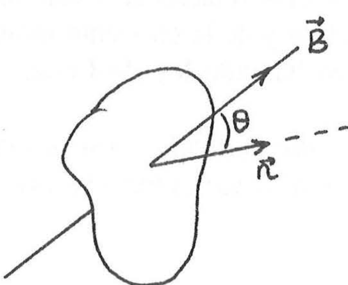
$$\phi_m = \vec{B}.\vec{n}A = B.A$$



Si el campo magnético no es perpendicular a la superficie, el flujo viene definido por

$$\phi_m = \vec{B}.\vec{n}A = B.A\cos\Theta = B_n.A$$

en donde $B_n = \vec{B}.\vec{n}$ es la componente del vector campo que es perpendicular o normal a la superficie.



En un campo magnético constante en el espacio, el flujo magnético a través de una espira es igual al producto de la componente del campo magnético perpendicular al plano de la espira y el área de la misma. En general, para una bobina de N vueltas, el flujo magnético que la atraviesa es

$$\phi_m = NBA\cos\Theta$$

Para el caso general en el cual $\vec{B}$ no es necesariamente constante en todo el área, el flujo es

$$\phi_m = \int_S N\vec{B}.\vec{n}dA = \int_S NB_n dA$$

La unidad de flujo magnético es la del campo magnético multiplicada por la unidad de área, y se denomina **weber** (Wb)

$$1 \text{ Wb} = 1 \text{ T.m}^2$$

9.2. Fem inducida. Ley de Faraday. Ley de Lenz.

La integral lineal del campo eléctrico, alrededor de un circuito completo es igual al trabajo realizado por unidad de carga, el cual, por definición, es la fuerza electromotriz del circuito

$$\mathscr{E} = \oint_C \vec{E}.d\vec{\ell}$$

Como el campo eléctrico resultante de un flujo magnético variable no es conservativo, la integral de línea alrededor de una curva cerrada es igual a la fem inducida, la cual es igual a la variación con el tiempo del flujo magnético:

$$\mathscr{E} = \oint_C \vec{E}.d\vec{\ell} = -\frac{d\phi_m}{dt}$$

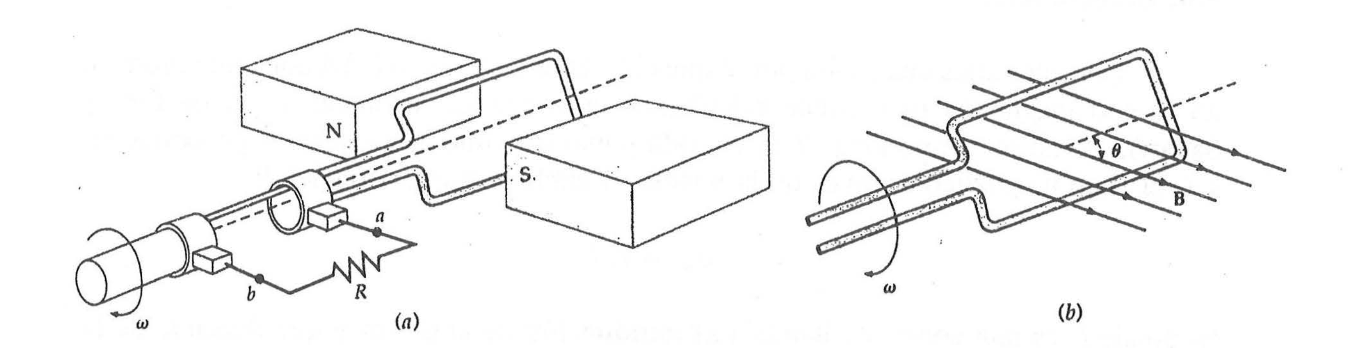
Este resultado se conoce con el nombre de **ley de Faraday.**

El signo negativo está relacionado con la dirección de la fem inducida. La dirección y sentido de la fem y de la corriente inducidas pueden determinarse mediante un principio general físico llamado **ley de Lenz:**

"La fem y la corriente inducidas poseen una dirección y sentido tal que tienden a oponerse a la variación que las produce".

9.3. Generadores.

La mayor parte de la energía eléctrica utilizada actualmente se produce mediante generadores eléctricos en forma de corriente alterna. Un simple **generador** de corriente alterna está formado por una espira en rotación dentro de un campo magnético uniforme, como indica la figura:



Cuando la línea perpendicular al plano de la espira forma un ángulo θ con un campo magnético uniforme $\vec{B}$, el flujo magnético a través de la espira es

$$\phi_m = NBA \cos\theta$$

siendo N el número de vueltas de la bobina y A el área de la misma. Cuando la bobina gira mecánicamente, el flujo a su través cambia con el tiempo y según la ley de Faraday, se inducirá en la bobina una fem. Si el ángulo inicial es δ, al cabo de cierto tiempo t el ángulo será

$$\theta = \omega t + \delta$$

en donde ω es la frecuencia angular de rotación. Por tanto, el flujo magnético a través de la espira será

$$\phi_m = NBA \cos(\omega t + \delta)$$

La fem en la bobina será

$$\mathscr{E} = -\frac{d\phi_m}{dt} = -NBA\frac{d}{dt}\cos(\omega t+\delta) = +NBA\,\omega\,sen(\omega t+\delta)$$

Esta ecuación se escribe también de la forma

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_{máx}\,sen(\omega t+\delta)$$

en donde

$$\mathscr{E}_{máx} = NBA\omega$$

es el valor máximo de la fem.

9.4. Inductancia.

Consideremos una espira por la que circula una corriente I. La corriente produce un campo magnético (que puede calcularse, en principio, mediante la ley de Biot y Savart). Como el campo magnético en todo punto próximo a la espira es proporcional a I, el flujo magnético a través de la misma es también proporcional a I:

$$\phi_m = L.I$$

en donde L es una constante llamada **autoinducción** de la espira y que depende de la forma geométrica de la espira. La unidad de inductancia en el SI es el **henrio** (H):

$$1\ H = 1\ \frac{Wb}{A} = 1\ \frac{T.m^2}{A}$$

El cálculo de la autoinducción en cualquier espira es muy difícil. Sin embargo, existe un caso, el de un solenoide arrollado apretadamente, cuya autoinducción puede calcularse directamente. El campo magnético en un solenoide de estas características, de longitud ℓ, por el que circula una corriente I viene dado por la ecuación

$$B = \mu_o n I$$

en donde $n = N/\ell$ es el número de vueltas por unidad de longitud. Si el solenoide posee un área transversal A, el flujo a través de las N vueltas es

$$\phi_m = NBA = n\ell BA = \mu_o n^2 A \ell I$$

Cuando la intensidad de corriente de un circuito varía, el flujo magnético debido a la corriente también se modifica, por tanto, en el circuito se induce una fem. Como la autoinducción del circuito es constante, la variación del flujo está relacionada con la variación de intensidad por

$$\frac{d\phi_m}{dt} = \frac{d(LI)}{dt} = L\ \frac{dI}{dt}$$

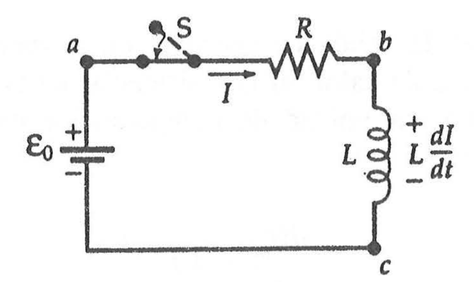
De acuerdo con la ley de Faraday resulta:

$$\mathscr{E} = -\ \frac{d\phi_m}{dt} = -\ L\ \frac{dI}{dt}$$

8.5. Circuitos L-R.

La inducción de un circuito impide que la corriente aumente o disminuya de modo instantáneo. Los circuitos que contienen bobinas o solenoides de muchas vueltas tienen una gran autoinducción. Cada bobina o solenoide constituye un **inductor**. El símbolo de una autoinducción o bobina es . Con frecuencia se puede despreciar la autoinducción del resto del circuito en comparación con la de un inductor de este tipo. Un circuito que contiene bobinas o solenoides se denomina **circuito L-R.**

Un circuito típico L-R es el de la figura siguiente:



Inmediatamente después de cerrado el interruptor S, la corriente comienza a crecer en el circuito y una fuerza contraelectromotriz de magnitud $L\, dI/dt$ se genera en el inductor. Aplicando la regla de las mallas de Kirchhoff al circuito resulta:

$$\mathscr{E}_o - IR - L\frac{dI}{dt} = 0 \tag{1}$$

Inicialmente la corriente es nula y la fuerza contraelectromotriz $L\, dI/dt$ es igual a la fuerza electromotriz de la batería, $\mathscr{E}_0$. Por tanto, la variación inicial de la intensidad de corriente respecto al tiempo es

$$\left(\frac{dI}{dt}\right)_o = \frac{\mathscr{E}_o}{L}$$

Al crecer la corriente, se incrementa la caída de potencial IR y la magnitud dI/dt disminuye. Al cabo de un corto tiempo, la corriente alcanza un valor positivo I, y se cumple

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\mathscr{E}_o}{L} - \frac{IR}{L}$$

De forma análoga a como vimos que se necesita realizar un trabajo para cargar un condensador, y que éste , cuando está cargado, almacena una energía dada por la expresión

$$U = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

existe una expresión para la energía de un campo magnético. Para producir una corriente en un inductor es necesario realizar un trabajo. Operando en la ecuación (1) tenemos

$$\mathcal{E}_o I = I^2 R + LI \frac{dI}{dt}$$

El término $\mathcal{E}_o I$ es la salida de potencia de la batería. El término I^2R es la potencia disipada en forma de calor en la resistencia del circuito. El término $LI\, dI/dt$ representa la energía que por unidad de tiempo incide en el inductor. Si U_m es la energía en el inductor se verifica

$$\frac{dU_m}{dt} = LI \frac{dI}{dt}$$

La energía total en el inductor puede determinarse integrando esta ecuación desde el tiempo $t=0$ cuando la corriente es nula hasta $t=\infty$, cuando la corriente ha alcanzado su valor final

$$U_m = \int dU_m = \int_0^{I_f} LI\, dI = \frac{1}{2} LI_f^2$$

La energía almacenada en un inductor que transporta una corriente I viene dada por

$$U_m = \frac{1}{2} LI^2$$

10. CIRCUITOS DE CORRIENTE ALTERNA

10.1. Introducción

La corriente alterna, en comparación con la corriente continua, tiene la gran ventaja de que la energía eléctrica puede transportarse a largas distancias a tensiones muy elevadas y corrientes bajas para reducir las pérdidas de energía en forma de calor por efecto Joule. Luego puede transformarse, con pérdidas mínimas de energía, en tensiones más bajas y seguras con las correspondientes corrientes más altas para su empleo ordinario. Los transformadores que realizan estos cambios de tensión y de corriente funcionan sobre la base de la inducción magnética.

10.2. Corriente alterna en una resistencia

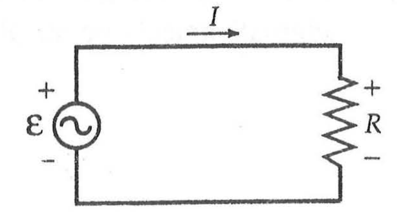
Cuando realizamos el estudio de los circuitos de corriente continua (cc), sañalamos que las reglas de Kirchhoff se aplican a cualquier circuito en estado estacionario. Los estados estacionarios se alcanzan en los elementos del circuito casi inmediatamente después de que se introduzca una variación en la tensión o en la corriente. Puesto que el tiempo que se tarda en alcanzar el estado estacionario es mucho menor que el periodo de oscilación de los circuitos de corriente alterna (ca), podemos aplicar las reglas de Kirchhoff a los circuitos de corriente alterna del mismo modo que lo hicimos en los de corriente continua.

El circuito de la figura es un circuito simple de ca compuesto por un generador y una resistencia. Los signos (+) y (-) indican el extremo de potencial más elevado y más bajo respectivamente de la fuente de fem, cuando la corriente tiene el sentido supuesto en la misma. Los signos (+) y (-) de la resistencia indican el sentido de la caída de potencial correspondiente al sentido supuesto de corriente. La caída de tensión a través de la resistencia V_R viene dada por

$$V_R = V_+ - V_- = IR$$

Si la fem suministrada por el generador es $\mathscr{E}$, la aplicación de la regla de las mallas de Kirchhoff al circuito nos da

$$\mathscr{E} - V_R = 0$$



Si el generador produce una fem dada por

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_{máx} \cos \omega t$$

se tendrá

$$\mathcal{E}_{máx} \cos \omega t - IR = 0$$

la corriente en la resistencia es

$$I = \frac{\mathcal{E}_{máx}}{R} \cos \omega t$$

El máximo valor de I se presenta cuando *cos ωt* tiene su valor máximo igual a 1, en cuyo caso

$$I_{máx} = \frac{\mathcal{E}_{máx}}{R}$$

La corriente en la resistencia será:

$$I = I_{máx} \cos \omega t$$

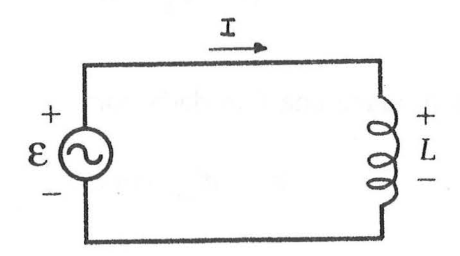
La potencia disipada en la resistencia varía con el tiempo. Su valor instantáneo viene dado por la expresión:

$$P = I^2 R = (I_{máx} \cos \omega t)^2 R = I_{máx}^2 R \cos^2 \omega t$$

La mayoría de los amperímetros y voltímetros están diseñados para medir valores eficaces (ef) también llamados **valores cuadráticos medios** de la corriente o de la tensión en lugar de los valores máximos o de pico. El valor eficaz de una magnitud cualquiera que varíe sinusoidalmente es igual al valor máximo de la misma dividida por $\sqrt{2}$.

10.3. Corriente alterna en bobinas.

El comportamiento de bobinas y condensadores en ca es muy distinto al que se tiene en cc. Por ejemplo, cuando un condensador está en serie en un circuito de cc, la corriente se interrumpe por completo cuando el condensador está totalmente cargado. Pero si la corriente es alterna, la carga fluye continuamente entrando y saliendo alternativamente de las placas del condensador.



En el circuito de la figura tenemos una bobina conectada a los terminales de un generador de ca. Cuando la corriente va aumentando en la bobina, se genera en ella una fem de valor *L dI/dt* debida al flujo variable. Normalmente la caída de potencial en la bobina debida a esta fem es mucho mayor que la originada por la resistencia de la misma, *IR*. Los signos (+) y (-) de la bobina indican el sentido de la caída de potencial. *dI/dt* es positivo para el sentido supuesto de la corriente. Como para *dI/dt* positivo, el punto por el que entra la corriente en la bobina está a un potencial más elevado que el punto por el que sale, la caída de tensión en la bobina V_L viene dada entonces por

$$V_L = V_+ - V_- = L \frac{dI}{dt}$$

Aplicando la regla de las mallas de Kirchhoff:

$$\mathscr{E} - V_L = 0$$

en donde $V_L = L\, dI/dt$ es el valor de la fem de la bobina. Haciendo que la fem del generador sea igual a $\mathscr{E}_{máx}\, cos\ \omega t$, se tiene

$$\mathscr{E} = L \frac{dI}{dt} = \mathscr{E}_{máx} \cos \omega t$$

$$dI = \frac{\mathscr{E}_{máx}}{L} \cos \omega t\ dt$$

$$I = \frac{\mathscr{E}_{máx}}{L} \int \cos \omega t\ dt = \frac{\mathscr{E}_{máx}}{\omega L}\ sen\, \omega t = I_{máx}\ sen\, \omega t$$

siendo $I_{máx}$ el valor máximo de la corriente.

La relación entre la corriente máxima (o eficaz) y la tensión máxima (o eficaz) en el caso de una bobina, puede escribirse de una forma semejante a la ecuación correspondiente a una resistencia:

$$I_{máx} = \frac{\mathscr{E}_{máx}}{R} = \frac{\mathscr{E}_{máx}}{\omega L} = \frac{\mathscr{E}_{máx}}{\chi_L}$$

en donde

$$\chi_L = \omega L$$

se denomina **reactancia inductiva o inductancia.**

Como $I_{ef} = \frac{I_{máx}}{\sqrt{2}}$ y $\mathscr{E}_{ef} = \frac{\mathscr{E}_{máx}}{\sqrt{2}}$ la corriente viene dada por

$$I_{ef} = \frac{\mathscr{E}_{ef}}{\omega L} = \frac{\mathscr{E}_{ef}}{\chi_L}$$

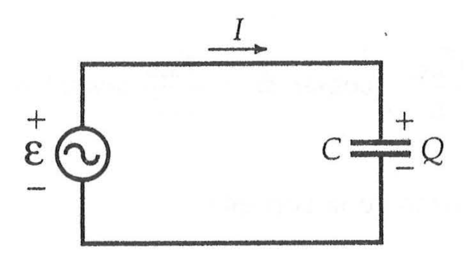
Al igual que la resistencia, la reactancia inductiva tiene unidades de **ohmio.**

En los circuitos que contienen sólo un generador y una bobina la caída de tensión a través de la bobina es igual a la tensión del generador. En circuitos que contienen tres o más elementos, la caída de tensión a través de cada uno de ellos no es igual normalmente a la tensión del generador. Resulta útil, por tanto, escribir la ecuación anterior en función de la caída de tensión a través de la bobina. Si $V_{L,ef}$ es la caída de tensión eficaz en una bobina, la corriente eficaz que pasa por ella es

$$I_{ef} = \frac{V_{L,ef}}{\omega L} = \frac{V_{L,ef}}{\chi_L}$$

10.4. Corriente alterna en condensadores.

En la figura se muestra un condensador conectado a los terminales de un generador.



Para el sentido de la corriente indicado, la corriente está relacionada con la carga por

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

Se han colocado los signos (+) y (-) sobre las placas del condensador indicando que existe una carga positiva en la placa donde entra la corriente y una negativa en la placa por donde sale la corriente. La caída de tensión en el condensador es

$$V_C = V_+ - V_- = \frac{Q}{C}$$

A partir de las reglas de las mallas de Kirchhoff, se tiene:

$$\mathscr{E} - V_C = 0$$

o bien

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_{máx} \cos \omega t = \frac{Q}{C}$$

Así pues,

$$Q = \mathscr{E}_{máx} C \cos \omega t$$

La corriente es

$$I = \frac{dQ}{dt} = - \omega \mathscr{E}_{máx} C \; sen \; \omega t$$

El valor máximo de I se presenta cuando

$$sen \; \omega t = -1$$

en cuyo caso

$$I_{máx} = \omega \mathscr{E}_{máx} C$$

Así, la corriente puede escribirse

$$I = - \omega \mathscr{E}_{máx} C \; sen \; \omega t = - I_{máx} \; sen \; \omega t$$

Utilizando la identidad trigonométrica

$$sen \; \omega t = - \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$I = - \omega C \mathscr{E}_{máx} \; sen \; \omega t = I_{máx} \cos (\omega t + \frac{\pi}{2})$$

Como sucedía con la bobina, la corriente del condensador no está en fase con la caída de tensión en el condensador, que es igual a la tensión del generador.

La relación entre la corriente máxima (o eficaz) y la tensión máxima (o -eficaz) en un condensador puede escribirse en forma semejante a la ecuación correspondiente a una resistencia:

$$I_{máx} = \frac{\mathscr{E}_{máx}}{R} = \omega\, C\, \mathscr{E}_{máx} = \frac{\mathscr{E}_{máx}}{\dfrac{1}{\omega C}} = \frac{\mathscr{E}_{máx}}{\chi_C}$$

y, análogamente,

$$I_{ef} = \frac{\mathscr{E}_{ef}}{\dfrac{1}{\omega C}} = \frac{\mathscr{E}_{ef}}{\chi_C}$$

en donde

$$\chi_C = \frac{1}{\omega C}$$

es la denominada **reactancia capacitiva o capacitancia** del circuito.

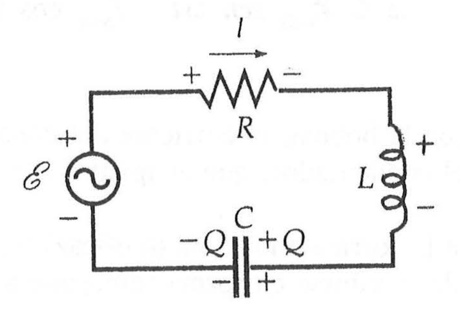
En los circuitos que contienen sólo un generador y un condensador la caída de tensión a través del condensador es igual a la tensión del generador. En circuitos que contienen tres o más elementos, la caída de tensión a través de cada uno de ellos no es igual normalmente a la tensión del generador. Resulta útil, por tanto, escribir la ecuación anterior en función de la caída de tensión a través del condensador. Si $V_{C,ef}$ es la caída de tensión eficaz en un condensador, la corriente eficaz que pasa por él es

$$I_{ef} = \frac{V_{C,ef}}{\dfrac{1}{\omega C}} = \frac{V_{C,ef}}{\chi_C}$$

La caída de tensión en el condensador está retrasada respecto a la corriente en 90º.

10.5. Circuitos LCR con un generador.

Un circuito importante que reúne muchas de las características de la mayoría de los circuitos de ca es el circuito LCR con un generador como el de la figura



Aplicando la regla de las mallas de Kirchhoff tendremos

$$\mathscr{E}_{máx} \cos \omega t - L \frac{dI}{dt} - \frac{Q}{C} - IR = 0$$

La corriente máxima de este circuito (que no vamos a deducir ahora) es

$$I_{máx} = \frac{\mathscr{E}_{máx}}{Z}$$

en donde

$$Z = \sqrt{R^2 + (\chi_L - \chi_C)^2}$$

La magnitud χ_L-χ_C se denomina **reactancia total**, mientras que Z se denomina **inpedancia**. Por tanto,

$$I = \frac{\mathscr{E}_{máx}}{Z} \cos (\omega t - \delta)$$

El valor de ω para el cual se hacen iguales χ_L y χ_C se obtiene a partir de

$$\chi_L = \chi_C \quad \Rightarrow \quad \omega L = \frac{1}{\omega C}$$

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2\pi f_o$$

La frecuencia f_o recibe el nombre de **frecuencia de resonancia** del circuito. La impedancia es mínima y el valor máximo de la corriente adquiere su valor más grande cuando la frecuencia de la fem es igual a la frecuencia de resonancia. A esta frecuencia se dice que el circuito está en **resonancia**. En la resonancia, la corriente está en fase con la tensión del generador.

Ya hemos visto que ni las bobinas ni los condensadores disipan energía. La potencia media suministrada a un circuito LCR serie es, por tanto, igual a la potencia media suministrada a la resistencia. La potencia media que se suministra a la resistencia es

$$P = I^2 R = [I_{máx} \cos (\omega t - \delta)]^2 R$$

11. ECUACIONES DE MAXWELL

11.1. Introducción

Las ecuaciones de Maxwell relacionan los vectores de campo eléctrico y magnético $\vec{E}$ y $\vec{B}$ con sus fuentes, que son las cargas eléctricas, las corrientes y los campos variables. Estas leyes juegan en el electromagnetismo clásico un papel análogo al de las leyes de Newton en la mecánica clásica. En principio, pueden resolverse todos los problemas de la electricidad y el magnetismo clásicos mediante el empleo de las ecuaciones de Maxwell, de la misma forma que pueden resolverse todos los problemas de la mecánica clásica utilizando las leyes de Newton.

Maxwell demostró que estas ecuaciones podían combinarse para originar una ecuación de onda que debían satisfacer los vectores de campo eléctrico y magnético $\vec{E}$ y $\vec{B}$. Estas ondas electromagnéticas están originadas por cargas eléctricas aceleradas. Maxwell demostró que la velocidad de las sondas electromagnéticas en el vacío debía ser

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_o \epsilon_o}}$$

en donde ϵ_o, la permitividad del vacío, es la constante que aparece en las leyes de Coulomb y de Gauss, mientras que μ_o, la permeabilidad del vacío, es la incluida en las leyes de Biot-Savart y de Amper. Introduciendo en la expresión anterior los valores de ϵ_o y de μ_o, resulta que la velocidad de las ondas electromagnéticas vale aproximadamente 3.10^8 m/s, igual que la velocidad de la luz. Posteriomente se demostró que la luz es una onda electromagnética.

11.2. Ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones de Maxwell son

$$\oint_S \vec{E}.d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_o} Q_{interior} \tag{1}$$

$$\oint_S \vec{B}.d\vec{S} = 0 \tag{2}$$

$$\oint_C \vec{E}.d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}.d\vec{S} \tag{3}$$

$$\oint_C \vec{B}.d\vec{l} = \mu_o I + \mu_o \epsilon_o \frac{d}{dt}\int_S \vec{E}.d\vec{S} \tag{4}$$

La ecuación (1) es la ley de Gauss. Establece que el flujo del campo eléctrico a través de cualquier superficie cerrada es igual a $1/\epsilon_o$ la carga neta encerrada dentro de la misma. La ley de Gauss implica que el campo eléctrico debido a una carga puntual varía en razón inversa al cuadrado de la distancia de la carga. Esta ley describe cómo divergen las líneas de campo eléctrico de una carga positiva y convergen sobre una carga negativa.

La ecuación (2), a veces denominada ley de Gauss del magnetismo, establece que el flujo del vector de campo magnético $\vec{B}$ es cero a través de cualquier superficie cerrada. Esta ecuación describe la observación experimental de que las líneas de campo magnético no divergen de ningún punto del espacio ni convergen sobre ningún otro punto. Esto implica que no existen polos magnéticos aislados.

La ecuación (3) es la ley de Faraday. Afirma que la integral del campo eléctrico a lo largo de cualquier curva cerrada C (la circulación), que es la fem, es igual a la variación por unidad de tiempo (con signo negativo) del flujo magnético que atraviesa cualquier superficie S limitada por la curva. La ley de Faraday decribe cómo rodean las líneas de campo cualquier superficie a través de la cual existe un flujo magnético variable y relaciona el vector de campo eléctrico $\vec{E}$ a la varaición respecto al tiempo del vector de campo magnético $\vec{B}$.

La ecuación (4), que es la ley de Ampere, con la modificación de Maxwell de la corriente de desplazamiento, establece que la integral de línea o circulación del campo magnético $\vec{B}$ a lo largo de cualquier curva cerrada C es igual a μ_o multiplicado por la corriente que atraviesa cualquier superficie limitada por la citada curva más el producto de $\mu_o\epsilon_o$ por la variación respecto al tiempo del flujo eléctrico que atraviesa la superficie. Esta ley describe cómo rodean las líneas de campo magnético a una superficie a través de la cual está pasando una corriente o bien existe un flujo eléctrico variable.

CUADERNO

27.02